التحليل الرياضي

سادرا لاش أرلينغهاوس
الفصل 19

ترجمة بتصرف
أ.د. مضر خليل عمر

مقدمة

غالبًا ما ينظر الجغرافيون إلى التحليل الرياضي على أنه مجموعة من الأدوات التي يمكن استخدامها لحل مشكلة أو توليد نتيجة ما . صحيح أن الرياضيات ، عند استخدامها بعناية ، تتمتع بهذه القدرة ، إلا أنها أيضًا أكثر بكثير من مجرد مجموعة أدوات . الرياضيات مادة نظرية غنية قائمة على المنطق؛ إنها فن وعلم في آن واحد. لاتخاذ خيارات جيدة حول كيفية استخدام الرياضيات ، من المهم أن يكون لديك فهم لبنيتها المفاهيمية الواسعة . مع ذلك ، قد يكون هذا الفهم صعبًا ويستغرق وقتًا طويلاً ، لأن مناهج الرياضيات ، على عكس الجغرافيا ، خطية في طبيعتها ، ويجب استيفاء المتطلبات الأساسية قبل إمكانية الانتقال إلى مستويات أعلى ، مما يجعل من الصعب تجربة الموضوع . لهذا السبب ، فإن الأفكار الرياضية المقدمة في هذا الفصل إما مستمدة من مجالات الرياضيات التي لا يُعد فيها التراكم الخطي للمتطلبات الأساسية ضرورة مطلقة ، أو مستمدة من مجالات ينبغي أن يكون القارئ على دراية بها بالفعل (المادة ليست صعبة ، ولكنها قد تتطلب قراءة متأنية لاستيعابها).

يمكن أن تكون كل من الرياضيات والجغرافيا بصرية بطبيعتها . الهندسة فرع من الرياضيات بصري ، ويمكن استخدام التحليل الهندسي لفحص بعض المكونات البصرية للجغرافيا . على سبيل المثال ، تُستخدم الهندسة الإقليدية لتنسيق الأرض باستخدام خطوط العرض والطول (كوكستر 1961؛ لوب 1976). استخدم إراتوستينس (276-194 قبل الميلاد) ، كبير أمناء مكتبة الإسكندرية الكبرى في مصر القديمة ، رياضيات إقليدس لحل مشكلة جغرافية مهمة : ما حجم الأرض ؟ يبدأ هذا الفصل بدراسة أعمال إراتوستينس وعلم المثلثات ، ثم ينتقل من دراسة التحليل باستخدام الأشكال الهندسية إلى التحليل باستخدام الأشكال العددية . سنتناول أيضًا منخل إراتوستينس للأعداد الأولية (خوارزمية لإيجاد الأعداد الأولية حتى عدد صحيح محدد) وآثاره على إجراء الحسابات بمختلف أنواعها . وفي هذا السياق ، نؤكد على أهمية كل من سرعة البديهة والدقة في إجراء الحسابات في البحث الجغرافي . تشمل المواضيع التي سنتناولها : التحويلات الرياضية وإنشاء الخرائط ؛ ونظرية الألوان الأربعة وتلوين الخرائط ؛ ونظرية منحنى جوردان ومسألة التعيين.

الهندسة الإقليدية والتصور

لننظر إلى الأرض ككرة . مع أن الأرض ليست كرة في الواقع ، إلا أن الكرة تُمثل تقريبًا جيدًا لشكلها ، وهي قابلة للتطبيق على الرياضيات الكلاسيكية لإقليدس ، خطوط العرض والطول ، في حالة وجود كرة ومستوى ، لا توجد سوى احتمالات منطقية قليلة لعلاقتهما : الكرة والمستوى لا يتقاطعان . المستوى مماس للكرة . المستوى يتقاطع مع الكرة . إذا كان هذا صحيحًا ، فإن :

-لا يمر المستوى بمركز الكرة (تُسمى دائرة التقاطع دائرة صغيرة).
- يمر المستوى بمركز الكرة (تكون دائرة التقاطع أكبر ما يمكن وتُسمى دائرة عظمى).
- الدوائر العظمى هي الخطوط التي تُقاس بها المسافة على الكرة:

- في المستوى، تُقاس أقصر مسافة بين نقطتين على طول قطعة مستقيمة، وتكون فريدة.
- في الكرة، تُقاس أقصر مسافة بين نقطتين على طول قوس دائرة عظمى.
- إذا لم تكن النقطتان على طرفين متقابلين لقطر الكرة ، فإن أقصر مسافة تكون فريدة .
- إذا كانت النقطتان على طرفين متقابلين لقطر الكرة ، فإن أقصر مسافة ليست فريدة (يمكن للمرء أن يجتاز أي نصف من نصفي الدائرة العظمى).
- تُسمى النقاط على طرفين متقابلين لقطر الكرة نقاطًا متقابلة.

بشكل عام ، للإشارة إلى القياسات على الكرة الأرضية بطريقة منهجية ، يمكننا إدخال نظام إحداثيات .

•تُنتَج مجموعة من خطوط المرجع باستخدام دائرة عظمى في موقع فريد (يُنصّف المسافة بين القطبين)، وهو خط الاستواء . تُنتَج مجموعة من المستويات المتباعدة بالتساوي ، الموازية للمستوى الاستوائي ، مجموعة من الدوائر الصغيرة المتباعدة بالتساوي ، والتي تُسمى عادةً خطوطًا متوازية .

•تُنتَج مجموعة أخرى من خطوط المرجع باستخدام نصف دائرة عظمى ، يصل أحد القطبين بآخر، وله موقع فريد : نصف دائرة عظمى يمر عبر المرصد الملكي في غرينتش، إنجلترا (ثلاث نقاط تحدد الدائرة). هنا ، يُنتَج التفرد في الاختيار بناءً على المعطيات التاريخية . اختر مجموعة من أنصاف الدوائر العظمى المتباعدة بالتساوي ، والتي تم الحصول عليها عن طريق تدوير المستوى القطري على طول المحور القطبي للأرض . تُسمى هذه الخطوط خطوط الطول . يُطلق على الخط الفريد اسم خط الزوال الرئيسي .

هذا النظام المرجعي الخاص بالأرض ليس فريدًا ؛ إذ يُمكن وجود عدد لا نهائي منه . هناك تشابه تجريدي بين هذا الترتيب الهندسي الخاص والنمط الهندسي للإحداثيات الديكارتية في المستوى (في نظام الإحداثيات الديكارتية ، تُمثل نقطة في المستوى بزوج من الأرقام) . لاستخدام هذا الترتيب ، يُمكن وصف موقع نقطة ، P ، على كرة الأرض بأنها تقع عند خط العرض الثامن شمال خط الاستواء وعند خط الزوال الرابع عشر غرب خط الزوال الرئيسي . في حين أن هذا قد يُساعد في تحديد موقع P وفقًا لنظام مرجعي واحد ، فقد يستخدم شخص آخر نظامًا مرجعيًا ذو شبكة أدق (بتقسيم المسافات بين الخطوط المتتالية إلى النصف) ، وبالنسبة لهذا الشخص ، سيكون الوصف الصحيح لموقع P هو عند خط العرض السادس عشر شمال خط الاستواء وعند خط الزوال الثامن والعشرين غرب خط الزوال الرئيسي . في الواقع، قد يُطلق على نقطة واحدة عدد لا نهائي من التسميات الصحيحة محليًا : وهو وضع غير مُرضٍ من حيث القدرة على تكرار النتائج . تكمن المشكلة في استخدام نظام موقع نسبي ، وليس مطلقًا.

لتحويل هذا النظام إلى نظام مطلق ، قابل للتكرار ، نستخدم استراتيجية قياس متفق عليها لتوحيد القياس . إحداها افتراض وجود 360 درجة قياس زاوية في الدائرة . لنفترض أن O هو مركز الكرة . وبالتالي ، يمكن وصف النقطة P بأنها تقع على بُعد 40 درجة شمال خط الاستواء (الزاوية AOP في الشكل 19.1، وقياس زاويتها حوالي O في اتجاه عقارب الساعة بعيدًا عن خط الاستواء)، وعلى بُعد 70 درجة غرب خط الزوال الرئيسي (الزاوية BOA في الشكل 19.1، وقياس زاويتها حوالي O في عكس اتجاه عقارب الساعة بعيدًا عن خط الزوال الرئيسي) . تقع النقطة P عند خط عرض 40 درجة شمالًا (شمالًا، أي شمال خط الاستواء) وخط طول 70 درجة غربًا (غربًا ، أي غرب خط الزوال الرئيسي) . غالبًا ، بدلًا من استخدام "الشمال" أو "الغرب" ، يُستخدم رمز "زائد" أو "ناقص" . عندما يكون اتجاه الدوران مع عقارب الساعة ، تكون قيمة الرقم المرتبط موجبة ؛ وعندما يكون اتجاه الدوران عكس عقارب الساعة ، تكون قيمة الرقم المرتبط سالبة.

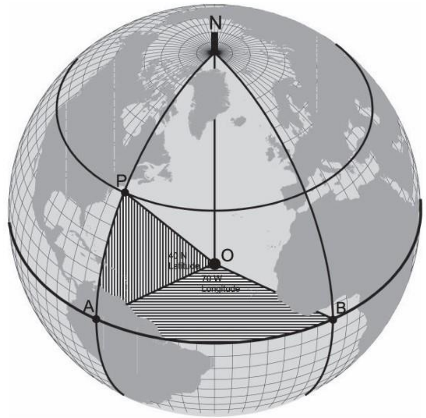

Figure 19.1 Determining location on a sphere. The point *P* lies at 40 degrees north latitude, north of the equator, and at 70 degrees west longitude, west of the prime meridian. Often, north and south are replaced by + and – as are east and west. In that case, *P* would have coordinates 40 degrees latitude and –70 degrees longitude

لا تُوضع معظم النقاط بشكل ملائم عند مضاعفات 10 درجات . يمكن كتابة أجزاء الدرجات كدقائق وثوانٍ ، أو كدرجات عشرية . التحويل من صيغة واحدة من السهل إجراء عملية حسابية بسيطة باستخدام الآلة الحاسبة . على سبيل المثال ، تُحوَّل 42 درجة و21 دقيقة و30 ثانية إلى 42 + 60/21 + 3600/30 درجة = 42.358333 درجة ؛ لاحظ قوى العدد 60. يسمح الترتيب الهندسي الموصوف أعلاه بإنشاء منهجية لتحديد مواقع النقاط على الأرض بطريقة فريدة . غالبًا ما يستخدم تحليل هذه النقاط علم المثلثات . يقدم الشكل 19.2 عرضًا مرئيًا للدوال المثلثية الموضحة في دائرة الوحدة مع محاور مُسمَّاة "محور" و"محور مشترك" (للمحور المتكامل) . يعتمد هذا التحليل الهندسي على الهندسة الإقليدية ، بافتراض مُسلَّمة التوازي لإقليدس (إذا كان هناك مستقيم ونقطة ليست على المستقيم، يمر من تلك النقطة مستقيم واحد فقط). لا يتقاطع مع الخط المعطى . تُخالف الهندسات غير الإقليدية هذه المُسلّمة (حاول أن تتخيل هندسة كرة الأرض في عالم غير إقليدي حيث تتقاطع الخطوط المتوازية في اللانهاية!).

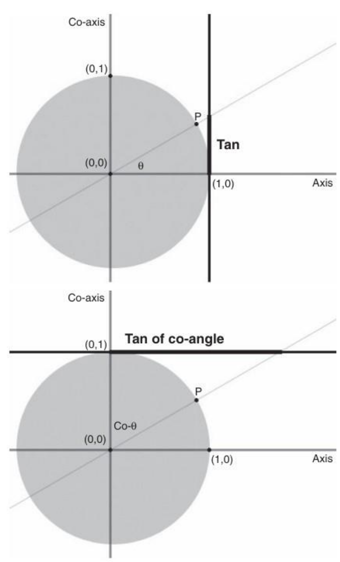

Figure 19.2 *Continued*

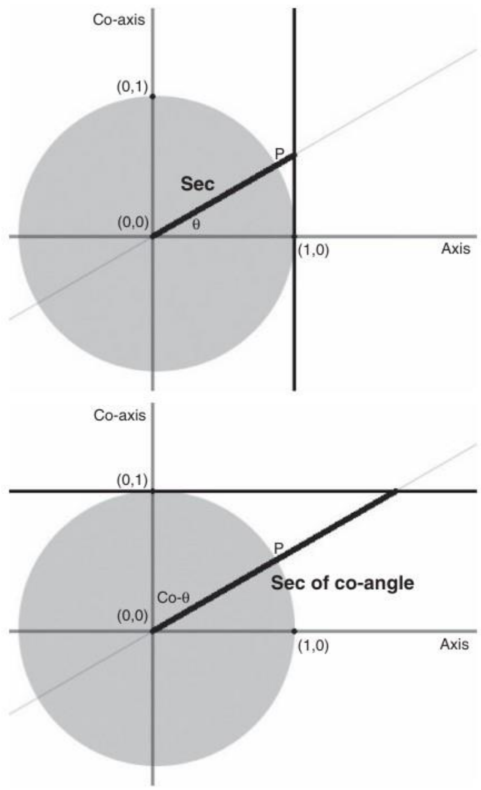

Figure 19.2 *Continued*

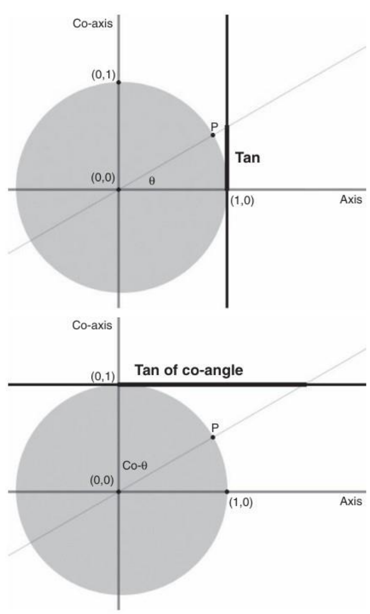

Figure 19.2 *Continued*

إراتوستينس ومحيط الأرض

اكتشف إراتوستينس كيفية قياس محيط الأرض دون أن يجتازها . ولتحقيق ذلك ، استخدم الهندسة الإقليدية وأدوات قياس بسيطة . استندت منهجيته البحثية إلى فهم واضح لرياضيات عصره . مكّنه هذا الفهم من معالجة مشكلة ذات أبعاد هائلة .

افتراضات إراتوستينس

الأرض كروية ، يُقاس محيط الكرة على طول دائرة عظمى على الكرة ، أشعة الشمس متوازية مع بعضها البعض ، تسقط أشعة الشمس مباشرة فوق الرأس ، في يوم الانقلاب الصيفي (حوالي 21 يونيو)، عند خط عرض 23.5 درجة شمالًا . تقع أسوان عند خط عرض 23.5 درجة شمالًا تقريبًا . وبالتالي ، في يوم الانقلاب الصيفي ، سيظهر انعكاس الشمس في بئر ضيق (وهو ما لن يحدث في أيام أخرى) . تقع الإسكندرية شمال أسوان . وبالتالي ، في 21 يونيو ، ستلقي الأجرام في الإسكندرية بظلالها ، بينما لن تفعل الأجرام في أسوان ذلك .

في الواقع ، لم تكن العديد من افتراضات إراتوستينس دقيقة (حيث تتوازن الأخطاء لتعطي نتيجة جيدة ؛ على سبيل المثال ، أسوان والإسكندرية ليستا على نفس خط الزوال ، وأسوان ليست على خط عرض 23.5 درجة شمالًا تمامًا) . ومع ذلك ، فإن منهجيات البحث التي تستفيد بشكل واضح من البنية النظرية الأساسية ، مثل الرياضيات ، كانت في كثير من الأحيان في طليعة الإنجازات البشرية (مكّن فهم إراتوستينس لمفاهيم الهندسة الإقليدية من إجراء حساباته الرائعة).

منهج إراتوستينس

- إيجاد محيط الأرض من خلال تحديد طول القوس المقطوع بزاوية مركزية صغيرة.
- إيجاد مكانين على سطح الأرض يقعان على نفس خط الزوال (اختار إراتوستينس الإسكندرية "A ″" وأسوان "S"، بالقرب من أسوان المعاصرة: الشكل 19.3 أ) .
- ركز إراتوستينس على مسلة أو عمود يقع في منطقة مفتوحة في الإسكندرية . قام بقياس الظل الذي ألقته المسلة (A ′ A ″) ، والذي يعمل بطريقة عقرب الساعة على مزولة ، ثم قاس ارتفاع المسلة (AA ′) ربما باستخدام خيط مربوط بطرف المسلة، الشكل 19.3 ب .
- وفقًا لإقليدس ، فإن الخطين المتوازيين اللذين يقطعهما قاطع لهما زوايا داخلية متبادلة ومتساوية . أشعة الشمس هي الخطوط المتوازية . يلامس أحد الشعاعين ، في الإسكندرية ، طرف المسلة ويمتد نحو الأرض نحو طرف ظل المسلة ، .″ AA ويمتد إلى AB في الشكل 19.2 ب. يدخل الشعاع الآخر، SO، في أسوان، إلى البئر ويمتد تجريديًا إلى مركز الأرض ، .O وتمتد المسلة ، ′ AA، أيضًا تجريديًا إلى مركز الأرض ، O؛ وبالتالي ، فإن الخط AO ، الذي يُحدده طرف المسلة ومركز الأرض ، هو خط عرضي يقطع شعاعي الشمس المتوازيين SO و.AB
- الزاويتان (BAO) و (SOA)هما زاويتان داخليتان متبادلتان في التكوين الهندسي الموصوف أعلاه؛ وبالتالي ، فهما متساويتان.

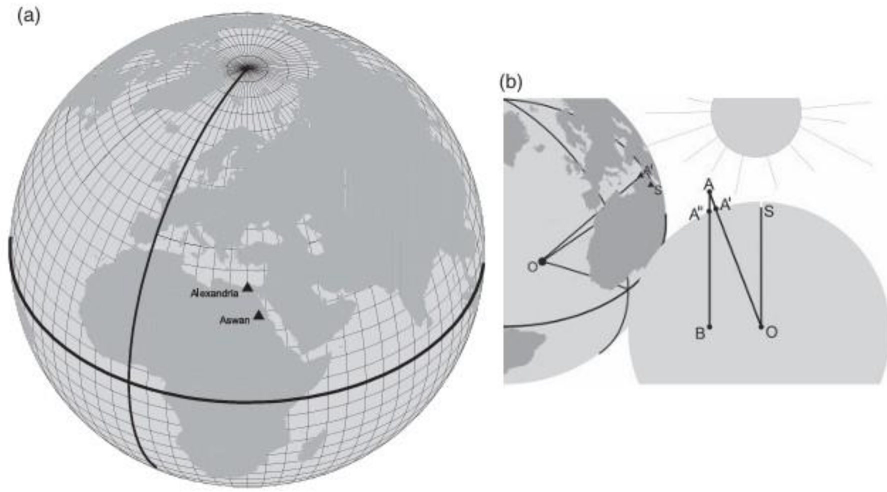

Figure 19.3 a. Relative location of Alexandria and Aswan. They are close to lying on the same meridian (half of a great circle). b. The obelisk (post) at Alexandria is *AA′* and the well at Syene is at a depth *S* below the surface of the Earth. This figure shows a detailed, geometric view of the relations among Alexandria *A′*, the obelisk *AA′*, the well at Syene *S*, the center of the Earth *O*, the shadow of the obelisk *AA″*, and the extension *AB* of that shadow into the Earth

•استخدم طول ظل المسلة وارتفاعها لتحديد الزاوية BAO ؛ المثلث ″ AA ′ A هو مثلث قائم الزاوية عند A ′. وبالتالي، نلاحظ أن tan (A ′ AA ″) = (طول الظل) / (ارتفاع المسلة). أدت قياسات إراتوستينس لهذه القيم إلى استنتاجه أن قياس الزاوية (″ A ′ AA) كان 7 درجات و12 دقيقة.

• قيمة 7 درجات و12 دقيقة تساوي 50/1 من قياس الدائرة بالدرجات . وبما أنه افترض أن الإسكندرية وأسوان تقعان على خط زوال (نصف دائرة عظمى) ، فقد ترتب على ذلك أن المسافة بين هذين الموقعين تساوي 50/1 من محيط الأرض.

•حسب إراتوستينس المسافة بين الإسكندرية وأسوان باستخدام سجلات تتعلق بقوافل الجمال . وكانت المسافة التي استخدمها 5000 استاديا . وبالتالي ، فإن محيط الأرض هو 250,000 استاديا ، أي أقل بقليل من 25,000 ميل (حسب كيفية تحويل الوحدات القديمة إلى الحديثة) . هذه القيمة قريبة بشكل ملحوظ من القيم الحالية.

الحساب والجبر والبيانات

بفضل استكشاف الفضاء ، والتصغير، وأجهزة الحاسوب ، أصبحنا اليوم قادرين على تصور الأرض بأكملها ، ليس فقط من خلال صور الأقمار الصناعية وغيرها . وتعتمد هذه الطرق لتصور الأرض بشكل أساسي على الرياضيات . فالهندسة تكمن وراء الصور، بينما يكمن الحساب والجبر وراء تحليل البيانات . وغالبًا ما يكون من السهل ببساطة الاعتماد على جدول بيانات لإجراء جميع حساباتنا ، أو استخدام آلة حاسبة لإجراء عمليات الجمع أو الضرب . ومع ذلك ، يجب ألا نغفل عن ضرورة استخدام عقولنا للعمل جنبًا إلى جنب مع الحاسوب .

غربال إراتوستينس للأعداد الأولية والتحليل الفريد للعوامل

أظهر إراتوستينس فهمًا راسخًا لمبادئ الهندسة كمنهجية بحث أساسية ، بالإضافة إلى مبادئ الحساب الأساسية لإدارة البيانات بنجاح . الأعداد الصحيحة هي الأعداد التي نستخدمها كثيرًا في دراسة قياسات الأرض . لذلك، من المهم أن نفهم بعض البنية المفاهيمية للأعداد الصحيحة . لنأخذ مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة فقط . يمكن تقسيم هذه المجموعة تجريديًا إلى نوعين من الأعداد : الأعداد التي عواملها الصحيحة الوحيدة هي نفسها والعدد 1 ، والأعداد التي تتضمن عواملها الصحيحة عددًا واحدًا على الأقل غير نفسها والعدد 1. يُسمى النوع الأول عددًا أوليًا ، ويُسمى النوع الثاني عددًا مركبًا . العدد 7 عدد أولي : عوامله الصحيحة الوحيدة هي 1 و7. العدد 8 عدد مركب : بالإضافة إلى 1 و 8، يُعدّ 2 و4 أيضًا عوامل . مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة غير منتهية ؛ ومجموعة الأعداد الأولية ، التي تتضمنها الأعداد الصحيحة الموجبة ، غير منتهية أيضًا.

كيف نعرف ما إذا كان عدد صحيح موجب معين أوليًا أم عددًا مركبًا ؟ نختبره لنرى ما إذا كان له عوامل غير نفسه والعدد 1 . كم عدد الأعداد الصحيحة التي يجب اختبارها ؟ أكبر عامل يمكن أن يحتوي عليه العدد هو جذره التربيعي . وبالتالي ، من الضروري فقط اختبار الأعداد ، كعوامل مرشحة ، حتى أكبر عدد صحيح موجود في الجذر التربيعي للعدد قيد الدراسة . أوضح إراتوستينس منهجية منظمة لاستبعاد العوامل المرشحة ، يشار إليها عادةً باسم "غربال الأعداد الأولية" . وفيها ، تسقط مضاعفات متتالية للأعداد الأولية من خلال الغربال بحيث تبقى الأعداد الأولية فقط في الغربال . في الجدول 19.1، الأعداد الأولية التي تبقى في الغربال هي أقل من 169 (13 تربيع).

Table 19.1 Sieve of Eratosthenes. Primes are sifted out that are less than $169 = 13^2$. Thus, only multiples of 2, 3, 5, 7, and 11 need be eliminated. Base materials from *Spatial Synthesis*, Chapter 3 with selected associated textual material used here with permission (Arlinghaus and Arlinghaus 2005).

1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10
11	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20
21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**	30
31	32	33	34	35	36	**37**	38	39	40
41	42	**43**	44	45	46	**47**	48	49	50
51	52	**53**	54	55	56	57	58	**59**	60
61	62	63	64	65	66	**67**	68	69	70
71	72	**73**	74	75	76	77	78	**79**	80
81	82	**83**	84	85	86	87	88	**89**	90
91	92	93	94	95	96	**97**	98	99	100
101	102	**103**	104	105	106	**107**	108	**109**	110
111	112	**113**	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	**127**	128	129	130
131	132	133	134	135	136	**137**	138	**139**	140
141	142	143	144	145	146	147	148	**149**	150
151	152	153	154	155	156	**157**	158	159	160
161	162	**163**	164	165	166	**167**	168		

الأعداد الأكثر جرأة هي الأعداد الأولية الأقل من 13؛ والأضعف هي الأعداد المركبة ، والأعداد المتوسطة الجرأة هي الأعداد الأولية الأكبر من أو تساوي 13 وأقل من 169. استُخدمت الأعداد الأكثر جرأة لاستبعاد جميع الأعداد الأضعف . أي ، المرور وإزالة جميع مضاعفات العدد 2 ؛ ثم المرور وإزالة جميع مضاعفات العدد 3؛ وهكذا ، حتى جميع مضاعفات العدد ١١. ما يتبقى سيكون بالضبط مجموعة جميع الأعداد الأولية الأقل من ١٦٩. تعد غربلة البيانات استراتيجية مهمة تستخدمها أجهزة الكمبيوتر كثيرًا ؛ على سبيل المثال ، قد تكون على دراية باستخدام المرشحات في جدول بيانات لإخفاء / إظهار بيانات مهمة . أو باستخدام أساليب فرز يمكنها التعامل مع مجموعات البيانات بكفاءة . جميعها أشكال مختلفة ، بعضها أكثر تعقيدًا من غيره ، من هذا النوع من المنهجية.

تتضمن إحدى مشكلات غربلة البيانات الدائمة في الجغرافيا تقسيم البيانات لعرضها على خريطة . غالبًا ما تُقسّم برامج نظم المعلومات الجغرافية (GIS) البيانات في الوضع الافتراضي عن طريق "الفواصل الطبيعية" . ومع ذلك ، عند غربلة البيانات بطريقة أخرى (مثل استخدام "فترات متساوية") ، غالبًا ما يظهر نمط مختلف تمامًا (يقدم مونمونير (1996) نظرة أكثر تفصيلًا على قضايا من هذا النوع). تُعد صياغة "النظريات" (عبارات تُطرح حول فئة واسعة من الكائنات الرياضية ، أو غيرها ، والتي يمكن إثباتها بناءً على نظام منطقي أساسي) من أهم النظريات المتعلقة بالأعداد الصحيحة . تنص هذه القاعدة على أن كل عدد صحيح موجب يمكن كتابته (تحليله إلى عوامل) بشكل فريد كحاصل ضرب أعداد أولية .

ويسري هذا التفرد فقط على الأعداد الأولية المشمولة في التحليل إلى عوامل . على سبيل المثال ، حقيقة أن 12 = 2 · 2 · 3 = 2 · 3 · 2 = 3 · 2 · 2 لا تنتهك التفرد. 12 = 2 2 3. وحسب العرف ، فإن العدد 1 هو حاصل ضرب لا أعداد أولية . إن الرغبة في التحليل إلى عوامل فريدة هي التي أدت إلى تجنب عد العدد 1 عددًا أوليًا ؛ ومن الواضح أنه يمكن تضمين العدد 1 في تحليل أي عدد إلى عوامل كلما دعت الحاجة . إن الرغبة في التوصيف الفريد للأعداد الصحيحة من حيث الأعداد الأولية تشبه بشكل تجريدي الرغبة في التوصيف الفريد للأماكن على الأرض من حيث الإحداثيات : لذا ، فإن الوضوح والعناية في تطوير النظام أمران بالغا الأهمية.

التحليل إلى عوامل وقانون التوزيع

يمكن فهم القوانين والنظريات الرياضية بسهولة . ومع ذلك ، من الخطأ افتراض أن سهولة فهم شيء ما تعني بالضرورة أنه لا قيمة له كمنهج بحثي أو كأداة مهمة تدعم منهجية بحثية . لنأخذ قانون التوزيع الذي يربط بين عمليتي الجمع والضرب . ينص هذا القانون على أن 2 (5 + 7) = (2 (5) + (2 (7. وبصياغة جبرية عامة ، مع مراعاة الحساب والجبر على طول طيف متواصل من التطور الرياضي، ينص القانون على أن: أ (ب + ج) = (أ ب) + (أ ج) (أ أقواس في الجانب الأيمن من المعادلة مُضافة للتأكيد... فهي غير ضرورية باستخدام قواعد ترتيب العمليات) .

لنأخذ بعض دلالات هذا القانون : ما هو (أ + ب) (أ - ب) ؟ باستخدام قانون التوزيع ، يكون الناتج ببساطة : أ (أ - ب) + ب (أ - ب) ، أي: أ (أ + (−1) ب) + ب (أ + (−1) ب) . باستخدام قانون التوزيع مجددًا ، لكل حد من الحدود في التعبير السابق ، يصبح لدينا الآن : أ 2 + (−1) أ ب + ب أ + (−1) ب 2، أي : أ 2 - ب 2 . باستخدام التطبيق البسيط الموضح هنا ، يُمكننا فهم كيفية استخدام قانون التوزيع للتحقق من عناصر مختارة من مسائل إدارة البيانات المعقدة . يُقدم الملحق 19.1 بعض الأمثلة (حاول إيجاد أمثلة أخرى بناءً على الجبر الذي تعلمته بالفعل ، ثم استخدمها عند التعامل مع مجموعات البيانات للتأكد من أن نتائج التحليلات التي تُجريها منطقية) .

غالبًا ما يستخدم التحليل الرياضي في الجغرافيا أرقامًا كبيرة : قد تفصل آلاف أو عشرات الآلاف من الأميال (الكيلومترات) بين الأماكن قيد الدراسة في دراسة واحدة . وتُعدّ المهارة في التعامل الذهني مع الأرقام ، وفي تقييم مدى منطقية الإجابة (بشكل مستقل عن الآلات الحاسبة أو الحواسيب) ، أمرًا بالغ الأهمية . فعندما يضيع المرء في الأرقام ، قد يضيع في الفضاء الأرضي المقابل . ويُعدّ فن وعلم نظرية الموقع مصدرًا مهمًا ومعقدًا لأساليب البحث في... الجغرافيا(Puu 2003) . عندما يرتبط التعقيد العددي والهندسي في بيئة جغرافية ، يمكن طرح المزيد من الأسئلة وحل المشكلات . على سبيل المثال ، خذ في الحسبان بعض الأشكال

الكسيرية في الجغرافيا(Arlinghaus 1985؛ Goodchild and Mark 1987؛ Batty and Longley 1996).

نظرة على المستقبل

في الوقت الذي أنجز فيه إراتوستينس عمله ، كان يعتمد على تحليل رياضي عالي المستوى . أما اليوم ، فتُدرّس الرياضيات المطلوبة في المدارس الثانوية . وبالتالي ، سيحتاج إراتوستينس المعاصر إلى مواكبة التطورات الحالية في الرياضيات .

التحويلات الرياضية: حالة الإسقاط المجسم

بعبارة فضفاضة ، يُرسل التحويل الرياضي عناصر من مجموعة إلى عناصر من مجموعة أخرى . يمكن تحويل مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة إلى مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية الموجبة بإرسال كل عدد صحيح إلى ضعف قيمته . هيمن مفهوم التحويل على الرياضيات البحثية منذ الحرب العالمية الثانية . يمكن للمرء اختيار دراسة الأجسام التي يتم تحويلها ، أو التحويل نفسه . القيام بهذا الأخير أمرٌ عالمي . نتناول هنا بإيجاز التحويل الرياضي للإسقاط المجسم من حيث صلته بالخرائط . الخرائط مسطحة ؛ والكرات كروية . الخرائط المسطحة مريحة ومفيدة لأغراض عديدة . كيف يمكن تسطيح الكرة الأرضية على المستوى ؟ إذا كان التفرد مطلوبًا ، فيجب أن تتوافق كل نقطة على الكرة الأرضية مع نقطة واحدة بالضبط في المستوى : يجب أن يكون التحويل الرياضي الذي يرسل الكرة الأرضية إلى المستوى واحدًا لواحد. (تخيل برتقالة ؛ هل يمكنك تسطيح الجلد بسلاسة ؟ لا، لا يمكن ذلك.)

تتضمن إحدى طرق تسطيح الكرة الأرضية تحويلًا يُعرف باسم الإسقاط المجسم . في الشكل 19.4 ، وُضعت الكرة الأرضية على مستوى . القطب الجنوبي ، S، هو نقطة تماس المستوى مع الكرة . استخدم القطب الشمالي، N، كمركز للإسقاط . اختر نقطة P على الكرة الأرضية واربطها داخل الكرة (الخط المتقطع) بالنقطة N . ثم مدّ القطعة المستقيمة NP لاختراق المستوى وسمّها النقطة ' P . واصل هذه العملية لجميع النقاط على الكرة الأرضية . كل نقطة على الكرة الأرضية تذهب إلى نقطة واحدة في المستوى وكل نقطة على المستوى تأتي من نقطة واحدة على الكرة الأرضية . التحويل هو تحويل واحد لواحد - أم أنه ليس كذلك ؟ لو كان كذلك، لكان الإسقاط المجسم سيقدم خريطة مثالية للكرة الأرضية في المستوى .

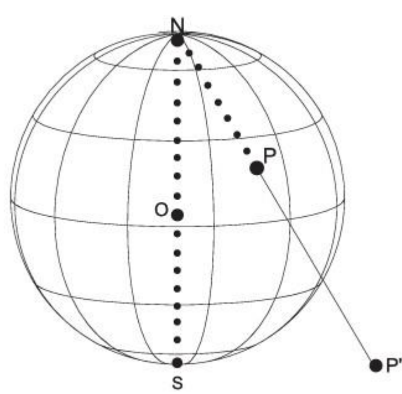

Figure 19.4 Stereographic projection of the sphere to the plane

ألقِ نظرة فاحصة : إلى أين تسقط النقطة N في المستوى؟ صلها بنفسها ومدد القطعة المستقيمة : يكون الخط الناتج مماسًا للكرة ولا يتقاطع مع المستوى . وبالتالي ، فإن هذا التعيين لا يرسل جميع النقاط من الكرة إلى المستوى ؛ بل يفشل عند نقطة واحدة . على العكس من ذلك ، للتفكير في تحويل المستوى إلى كرة ، يكفي إضافة نقطة واحدة فقط لإنشاء سطح كرة مدمج وجميل . فشل الإسقاط المجسم عند N لأن الهندسة التي بُني بها إقليدية ؛ ومرة أخرى ، تتحكم مسلمة التوازي لإقليدس في التحليل من وراء الكواليس (كوكستر 1961) . تخبرنا نظرية في الرياضيات الأكثر تقدمًا أن هذا في الواقع هو أفضل ما يمكننا فعله (لا يوجد تحويل يرسل جميع النقاط على الكرة إلى نقاط في المستوى بطريقة واحد لواحد).

أحد تداعيات هذه الحقيقة ، بالنسبة لصانعي الخرائط ، هو أنه **لا توجد خريطة مثالية** . فهناك عدد لا نهائي من الطرق لتحويل الكرة إلى مستوٍ . للوهلة الأولى ، يبدو هذا وضعًا كارثيًا . لكن في الواقع ، ما يعنيه هذا هو ضرورة توخي الحذر عند اختيار إسقاطات الخريطة واختيار إسقاط يحافظ على العناصر المطلوبة لمنظر الكرة الأرضية على الخريطة الورقية (ينظر الفصل 16). يُكرّس فن وعلم رسم الخرائط لمثل هذه المعطيات ، وقد كُتبت العديد من الأطروحات الرياضية والجغرافية حول هذا الموضوع . يُعدّ شكل رسم الخرائط غير الإقليدي (حيث تلتقي الخطوط المتوازية عند اللانهاية) موضوعًا مثيرًا للاهتمام للتكهن به ، وكذلك القضايا الأخرى ذات الصلة في رسم الخرائط (سنايدر 1993؛ يانغ وآخرون 2000).

يتضمن الاستخدام التقليدي للهندسة غير الإقليدية في الجغرافيا استخدام مقياس مانهاتن في الجغرافيا الحضرية (كراوس 1975). في الهندسة الإقليدية ، يوجد أقصر مسار واحد بين أي نقطتين ، يُسمى المسار الجيوديسي . في الهندسة الإقليدية ، يُعد المسار الجيوديسي فريدًا . ومع ذلك ، لنأخذ خريطة مركز مدينة مُرتبة على نمط شارع شبكي . الكتل هي مجموعات من المستطيلات مرتبة ، ربما ، على طول محاور النقاط الأساسية للبوصلة . لنأخذ المسار من الزاوية الشمالية الغربية للكتلة إلى الزاوية الجنوبية الشرقية للكتلة على طول شبكة الشوارع . هناك مساران جيوديسيان متميزان : أحدهما حول الزاوية الشمالية الشرقية للكتلة والآخر حول الزاوية الجنوبية الغربية للكتلة .

هناك مساران أقصر؛ والهندسة ليست إقليدية . لوجود خطوط جيوديسية متعددة آثارٌ على التخطيط والجغرافيا الحضرية : كيف يُمكن توجيه حركة المرور عبر مركز المدينة بما يسمح بسرعة المرور عبر المنطقة مع الحفاظ على مرونة سائقي السيارات للوصول إلى مجموعة متنوعة من التجار هناك ؟ تُقدم الشوارع أحادية الاتجاه حلاً ، وهي تفعل ذلك فقط بسبب وجود خطوط جيوديسية متعددة ؛ وإلا ، سيفقد سائق السيارة إمكانية الوصول إلى مجموعة متنوعة من المتاجر الموجودة نظرًا لتوجيهه بكفاءة عبر مركز المدينة . تُحل تعدد الخطوط الجيوديسية المشكلة : فمعرفة الرياضيات الكامنة وراء الجغرافيا أمرٌ بالغ الأهمية.

نظرية الألوان الأربعة

بمجرد أن تكون لدينا خريطة في المستوى ، في إسقاط مناسب ، تُظهر مناطق مختلفة ذات أهمية على الأرض ، فكم عدد الألوان اللازمة لتلوين الخريطة بطريقة تُمكّن من تمييز المضلعات المتجاورة عن بعضها البعض ؟ إذا كان المرء يلون خريطة لدول العالم وكان عدد الألوان المختلفة مساويًا لعدد الدول ، فلن تكون هناك مشكلة . ومع ذلك ، فإن هذا النوع من النهج لا يكشف كثيرًا عن النمط ولا يُعد استخدامًا فعالًا للألوان . أولاً، لننظر إلى المقصود بتجاور المناطق . لأغراضنا ، يُقال إن مضلعين متجاوران إذا كانا يشتركان في قطعة خط مشتركة (التلامس فقط عند نقطة لا يُشكل تجاورًا) . لنفترض : خريطة بمنطقتين متجاورتين . من الواضح أن لونين يكفيان لتلوين هذه الخريطة ، ولنقل الأحمر والأخضر . لنفترض خريطة

بثلاث مناطق . إذا كانت المناطق الثلاث عبارة عن ثلاثة خطوط متوازية ، مثل علم فرنسا ، فيكفي لونان أيضًا : لنفترض الأحمر على الخطين الطرفيين المفصولين بخط أخضر في المنتصف . أما إذا كانت المناطق الثلاث مرتبة بنمط متداخل ، كما هو الحال في وضع الطوب ، فستكون هناك حاجة إلى ثلاثة ألوان مختلفة ، ولنقل الأحمر والأخضر والأصفر .

إذا أُضيفت جزيرة في هذه الخريطة الأخيرة ، كما في الشكل ١٩,٥، فسيلزم استخدام أربعة ألوان للتمييز بين المناطق المتجاورة . إذا كانت الخريطة تحتوي على خمس مناطق ، فما هو الحد الأقصى لعدد الألوان التي يُمكن استخدامها للتمييز بين المناطق ؟ يُغرى البعض بقول خمسة ألوان . ومع ذلك ، بالنسبة لجميع الخرائط التي تحتوي على خمس مناطق ، فإن أربعة ألوان تكفي . في الواقع ، أظهرت الأبحاث الحديثة أن أربعة ألوان تكفي دائمًا لتلوين أي خريطة في المستوى ، بغض النظر عن حجمها أو عدد مناطقه ا! جرّب تلوين خريطة الولايات المتحدة المتجاورة ، 48 ولاية ، باستخدام أربعة ألوان . في حين أن الاختيارات السيئة في تعيين الألوان قد تُجبر على استخدام أكثر من أربعة ألوان ، فإن نظرية الألوان الأربعة تنص على وجود نظام تلوين واحد على الأقل لا يستخدم أكثر من أربعة ألوان لأي خريطة في المستوى . لكنها لا تُخبرنا بكيفية إيجاد هذا التلوين ؛ فالفكر البشري مطلوب لذلك.

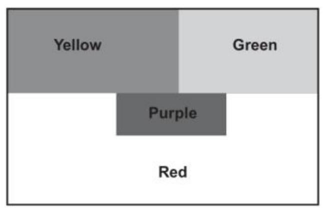

Figure 19.5 The four color theorem. The island in the middle requires the introduction of a fourth color; purple, to distinguish it from three adjacent regions

إذا لم يحتج المرء أبدًا إلى أكثر من أربعة ألوان لتلوين خريطة في المستوى ، فلماذا تُقدم برامج رسم الخرائط (أو نظم المعلومات الجغرافية) هذا العدد الكبير من خيارات الألوان ؟ هناك عدد من الإجابات عن هذا السؤال . أحدها هو أن البيانات التي يتم رسمها غالبًا ما تُقسم إلى فترات ذات كثافة متزايدة . إذا كان نظام الألوان متدرجًا بلون واحد ، تزداد شدته مع ازدياد حجم البيانات ، فإن نمط اللون يُعطي دلالة على البيانات المُرسَمة . على سبيل المثال ، كلما زاد تركيز الملوثات ، زاد عمق اللون الأحمر؛ وبالتالي، يُمكن تحديد النقاط الساخنة للتلوث . لو كان نظام الألوان يتكون من ألوان مستقلة مثل الأحمر والأخضر والأصفر والأرجواني، لما أمكن تحديد النقاط الساخنة من اللون لأن معنى اللون لن يكون مرتبطًا بمعنى البيانات المُرسَمة ؛ بل سيكون مرتبطًا بأنماط تجاور المناطق متعددة الأضلاع . إذا كان هناك أكثر من أربعة تدرجات لونية للبيانات ، فسيلزم أيضًا أكثر من أربعة تدرجات لونية مميزة للحصول على العرض المطلوب الذي تتوافق فيه شدة اللون مع كثافة البيانات . وبالتالي ، هناك أسباب وجيهة لاستخدام أكثر من أربعة ألوان على الخريطة.

سؤال آخر هو : كم عدد الألوان التي تضمن دائمًا نمط التلوين المطلوب على الكرة ؟ قد يُفاجئك معرفة أنه نفس العدد الموجود على المستوى . يكمن الدليل ، الذي حُدد منذ زمن طويل ، في استخدام الإسقاط المجسم مرة أخرى . لنفترض وجود أي خريطة على كرة . اثقب ثقبًا (أزل نقطة) في الجزء الداخلي لأي منطقة من الخريطة . الآن ، استخدم هذا الثقب كمركز لإسقاط مجسم لرسم خريطة لجميع النقاط الأخرى على المستوى . يمكن تلوين الخريطة في المستوى (باستخدام أربعة ألوان) ، ولأن الثقب كان في الجزء

الداخلي من منطقة ، فإن الخريطة المسقطة في المستوى تحتوي على بحر حول حافتها . أعد إسقاط الخريطة ذات الألوان الأربعة في المستوى على الكرة ، ولوّن النقطة المضافة بنفس لون "البحر". وبالتالي، تحتوي الخريطة على الكرة أيضًا على أربعة ألوان .

نظرية منحنى جوردان

المنحنى المغلق البسيط هو منحنى يُعادل دائرةً طوبولوجيًا - أي أي منحنى يُمكن إرجاعه إلى شكل دائرة... مثل شريط مطاطي . تُعزى هذه النظرية إلى كاميل جوردان (1838-1922) ، الذي طرحها لأول مرة في كتابه "دورة التحليل" . من المُلائم غالبًا التفكير في المجالات المختلفة على أنها "داخل ل "و"خارج" .المنحنى الشائع الذي لا يُعد منحنىً مغلقًا بسيطًا (أو منحنى جوردان) هو الرقم 8. لتسمية "الداخل" و"الخارج"، تجوّل حول المنحنى عكس اتجاه عقارب الساعة ، وسمِّ المجال الذي يُشير إليه ذراعك الأيسر بـ "الداخل" والمجال الذي يُشير إليه ذراعك الأيمن بـ "الخارج" . في حالة الرقم 8، بمجرد تجاوز التقاطع ، يصبح الداخل هو الخارج ، والعكس صحيح!

المنحنيات المتقاطعة ليست منحنيات مغلقة بسيطة . من المهم لصانعي الخرائط معرفة أنواع المنحنيات التي يعملون عليها . إذا لم يفعلوا ذلك ، فقد يُعيّنون عنوانًا للجانب الخطأ من الشارع . على سبيل المثال ، إذا عُيّنت جميع العناوين ذات الأرقام الزوجية لـ "داخل" الشارع وجميع العناوين الفردية لـ "خارجه" ، وكانوا يتعاملون مع منحنى شارع يُعادل الرقم 8 (كما هو الحال مع العديد من الطرق أو أجزاء الطرق في أنماط الشوارع الحضرية الشبكية) ، فقد تظهر الأرقام الزوجية على الخريطة "داخل" الرقم 8 في الأعلى و"خارج" في الأسفل ، على عكس الوضع الواقعي المقابل (التحليل الرياضي 331).

الحل بسيط : قسّم الرقم 8 عند تقاطعه إلى منحنيين مغلقين بسيطين منفصلين . الحل بسيط بمجرد فهم المفاهيم المعنية ! ستملأ حزم التعبئة في البرامج الحديثة ، عند استخدام دلو الطلاء ، نصف الرقم 8 فقط . (يعلم مطورو البرامج بنظرية منحنى جوردان ، ولكن قد لا يعرف المستخدم العادي سبب ملء الدلو نصف الرقم 8 فقط). في حالة العديد من المنحنيات المغلقة البسيطة ، من السهل تحديد ما إذا كانت نقطتان عشوائيتان تقعان على نفس الجانب أو على جانبين متقابلين من المنحنى . أما في الحالات المعقدة ، فقد لا يكون الأمر سهلاً على الإطلاق . باستخدام الشكل 19.6، يمكننا توضيح كيفية الحصول على حل في حالة معقدة .

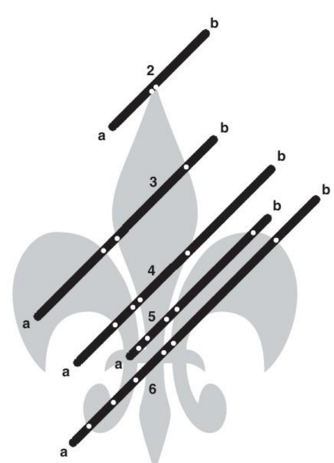

Figure 19.6 **Assignment algorithm** related to the Jordan Curve Theorem determines when *a* and *b* lie on the same or on opposite sides of a simple closed curve (the *Fleur-de-Lis* in this case)

يمكن القيام بذلك لبضعة مواضع لـ a و b منحنى Fleur-de-Lis هو منحنى مغلق بسيط؛ إنه معقد نوعًا ما ، على الرغم من أنه ليس معقدًا مثل شبكات الشوارع الحضرية ، ولكنه لا يحتوي على تقاطعات . بمعطى أي نقطتين a وb في المستوى ، وليس على منحنى مغلق بسيط J. كيف يمكنك معرفة ما إذا كان a و b يقعان على نفس الجانب من J أو على جانبين متقابلين من J؟

• اختر اتجاهًا ثابتًا. اربط أ و ب بقطعة مستقيمة (يمكن تحقيق ذلك بشكل فريد لأننا في المستوى بدلًا من أن نكون، على سبيل المثال، على الكرة). احسب عدد التقاطعات التي تشكلها القطعة أ مع ج.

إذا كان عدد التقاطعات زوجيًا (0 زوجي)، فإن أ و ب يقعان على نفس جانب ج.

إذا كان عدد التقاطعات فرديًا، فإن أ و ب يقعان على جانبين متقابلين من ج.

<u>نظرية منحنى جوردان كالتالي</u>:

•تسمح بالتعيين الصحيح للعناوين على جانبي الشوارع . يجب أن تكون نظرية منحنى جوردان مدمجة في البرنامج إذا كان الترميز الجغرافي يعمل على العناوين المتطابقة.

•تسمح بتلوين المضلعات بشكل مناسب بصريًا.

يوضح هذا النظام ضرورة فصل المنحنيات المعقدة عند نقاط تقاطعها لضمان ثبات الخصائص المذكورة أعلاه على الخرائط . تُعد هذه الحقيقة مهمة في رقمنة الخرائط (وفي مجالات أخرى).

يتيح تطوير نظام ترميز طوبولوجي للخرائط يحافظ على خصائص الاتجاه والاتصال بين الأجسام، بغض النظر عن المسافة . وقد طُوّر نظام الترميز والمراجع الجغرافية المتكاملة طوبولوجيًا (TIGER) التابع لمكتب الإحصاء الأمريكي وهيئة المسح الجيولوجي الأمريكية استعدادًا للتعداد السكاني العشري لعام 1990. وبفضل التحسينات الطوبولوجية ، مكّن النظام من التمييز بين المواقع الداخلية والخارجية وعناوين الشوارع . ولم يكن هذا هو الحال على نطاق واسع في نظام الملف الأساسي الجغرافي / ترميز الخرائط المستقلة المزدوجة (GBF/DIME) المستخدم سابقًا. وبهذه الطريقة، تكشف نظرية منحنى جوردان عن بعض الاستخدامات المعاصرة للرياضيات كمنهجية بحث في الجغرافيا.

الخلاصة

لتطبيقات الرياضيات تاريخٌ عريق ، ومستقبلٌ زاهر، في الجغرافيا وعلوم الأرض ذات الصلة . في هذا الفصل ، استعرضنا استخدام إراتوستينس المبتكر للرياضيات المعاصرة في عصره (لقياس محيط الأرض) ، ودرسنا كيف تُسهم الهندسة في تطوير رسم الخرائط ، وشددنا على أهمية المناهج المنهجية والمدروسة في التعامل مع الأعداد والتعامل مع البيانات (بالاعتماد مجددًا على أعمال إراتوستينس). كما درسنا نظرية منحنى جوردان ونظرية الألوان الأربعة . ابتكر إراتوستينس وجوردان وآخرون نظرياتٍ وخوارزمياتٍ مفاهيميةً عظيمةً أدت إلى تطوراتٍ في التطبيقات .

والأهم من ذلك ، تُبرهن هذه المناهج على ضرورة فهم الرياضيات والمنطق الكامنين وراء الخرائط والقرارات التي نتخذها . **<u>فالخرائط تؤثر على قراراتنا ، والقرارات تؤثر على خرائطنا</u>**. لذا ، يُعدّ الفهم الواضح لكيفية ارتباط الخرائط بالرياضيات جزءًا أساسيًا من العمل الجغرافي . تُقدّم المجلدات التي حرّرها جيمس ر. نيومان (2003) منظورًا لأعمال علماء الرياضيات الآخرين ، وتُقدّم أدلةً قيّمةً للمصادر الأولية والثانوية في الأدبيات الرياضية . قد يُساعدك هذا على توسيع نطاق معرفتك أثناء سعيك لتطبيق الرياضيات على مشاكل العالم الحقيقي.

التمرين ١٩,١

الجغرافيا الرياضية عمليًا

لاختبار معرفتك بالجوانب الجغرافية والرياضية لتنسيق الأرض ، أنشئ سلسلة من المسائل متزايدة الصعوبة تتعلق بخطوط العرض والطول ، تتضمن أسئلة مثل:

- ما طول درجة واحدة من خطوط العرض (بالأميال)؟
- ما طول درجة واحدة من خطوط الطول (بالأميال) عند خط عرض ٤٢ درجة؟
- عند أي خط عرض يكون طول درجة واحدة من خطوط الطول (بالأميال) مساويًا تمامًا لنصف قيمة درجة واحدة من خطوط الطول عند خط الاستواء؟
- لوّن خريطة واقعية (حاول تعديل بعض الافتراضات الأساسية، مثل تلك المتعلقة بالتجاور أو بالسطح المراد رسمه، لإنشاء نظام تلوين معدّل).
- وصف بعض المواقف الواقعية التي قد تؤدي فيها المسارات التي ليست منحنيات مغلقة بسيطة إلى نتائج خاطئة (أظهر كيفية تصحيح النمط بحيث يتم تحقيق النتائج الصحيحة).

الملحق 19.1

هل الإجابة منطقية؟

ما هو ٢٤ × ٢٦؟ إذا أدركنا أنه ببساطة حاصل ضرب (٢٥ - ١) و(٢٥ + ١)، فمن الواضح أن هذا الناتج هو نفسه ٢٥ ٢ - ١. ما هو ٢٥ ٢؟

يُقدم قانون التوزيع الإجابة مرة أخرى . صِغ المسألة الأخيرة بشكل أعم قليلاً بحيث تُطبق الطريقة الناتجة بشكل أكثر شمولية - أي على أكثر من ٢٥ فقط. لنضرب (١٠س + ٥) في (١٠س + ٥). يوضح قانون التوزيع أن الناتج هو 100×2 + 100×2 + 25، وهو أيضًا، باستخدام قانون التوزيع من اليمين إلى اليسار، 100×(× + 1) + 25. عندما يكون2 = x ، كما في حالة 25، فمن الواضح أن 25×2 يساوي ببساطة 2 × 3 × 100، أو 600، زائد 25. أي أن 25×2 يساوي 625؛ وبالتالي، فإن 24×26 يساوي ببساطة 625 × 1 أو 624. ما هو 45 × 45؟ هو 4 × 5 × 100 أو 2000 زائد 25 أو 2025.

ما هو 98 × 92؟ حاصل ضرب (٩٥ + ٣) في (٩٥ - ٣) أو ٩٠٢٥ - أو ٩٠١٦.

جرّب بعضها بنفسك - أذهل أصدقاءك ببراعتك الجديدة في تحليل الأرقام! استخدم عقلك للتحقق من حاسوبك (أنت أذكى منه!).

الملحق 19.2

ماذا يعني "خريطة واسعة النطاق"؟

تُسمى الخرائط أحيانًا كبيرة أو صغيرة النطاق . قد تكون هذه المصطلحات مُربكة ، ولكنها ليست كذلك عندما تكون الرياضيات الأساسية واضحة . لنفترض أن مقياس الرسم على إحدى الخرائط هو أن بوصة واحدة على الخريطة تُمثل ٥٠٠٠٠ بوصة على سطح الأرض. هناك طريقة أخرى لتجسيد هذه الفكرة وهي التعبير عنها كنسبة ، أو كسر، مثل ٥٠٠٠٠/١، بغض النظر عن وحدات القياس (فهي نفسها في البسط والمقام). يُطلق على هذا الشكل من التعبير عن المقياس غالبًا "الكسر التمثيلي."

لنفترض أن خريطة أخرى بمقياس ١٠٠٠٠٠/١. أي خريطة يُقال إنها ذات مقياس "أكبر"؟ أي كسر أكبر؟ الكسر 50,000/1 أكبر من 100,000/1 (هل تفضل الحصول على قطعة فطيرة من فطيرة كبيرة مقطعة إلى 50,000 قطعة أم من فطيرة كبيرة بنفس الحجم مقطعة إلى 100,000 قطعة؟). وبالتالي، فإن الخريطة بمقياس 50,000/1 أكبر مقياسًا من الخريطة بمقياس 100,000/1. هذا هو التفسير البسيط من الناحية الرياضية. أما الآثار المترتبة من الناحية الجغرافية فهي أن الخرائط ذات المقياس الأكبر تعطي رؤية محلية أكثر وقد تُظهر تفاصيل أكثر من الخرائط ذات المقياس الأصغر التي تُظهر رؤية عالمية أكثر بتفاصيل أقل. قد يكون الحل الأفضل هو ببساطة عدم استخدام مصطلحي "كبير" و"صغير"، واختيار مصطلحات أوضح مثل "محلي" و"عالمي". مع ذلك، يستخدمها آخرون، لذا من المهم فهم المقصود، وأن المعنى مستمد مباشرةً من الأحجام النسبية للكسور التمثيلية. لذلك، لفهم معنى "كبير"، يجب معرفة كيفية قياس المقياس، وامتلاك مقياسين على الأقل لهذا المقياس لإجراء مقارنة.